Resolución : Parcial 3 - MA1112.

1. (6 ptos c/u) Resolver

$$a.\quad \int \frac{2x^2-6x+7}{\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)}\,dx$$

Solución : Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

Puesto que, el grado del polinomio del numerador, 2, es menor que el grado del polinomio del denominador, 3, entonces no dividimos los polinomios.

Observemos que el polinomio del denominador, $q\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)$, ya está factorizado.

Escribimos las fracciones simples asociadas al integrando $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-6x+7}{\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)}$, y obtenemos

$$\frac{2x^2-6x+7}{\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{\left(x-1\right)^2}+\frac{C}{x+2}$$

$$\Longrightarrow\qquad \frac{2x^2-6x+7}{\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)}=\frac{A\left(x-1\right)\left(x+2\right)+B\left(x+2\right)+C\left(x-1\right)^2}{\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)},$$

de aquí,

$$2x^2-6x+7=A\left(x-1\right)\left(x+2\right)+B\left(x+2\right)+C\left(x-1\right)^2.$$

Buscamos el valor de cada una de las constantes, A, B y C.

- Si $x=1$, entonces

$$2\left(1\right)^2-6\left(1\right)+7=A\left(\left(1\right)-1\right)\left(\left(1\right)+2\right)+B\left(\left(1\right)+2\right)+C\left(\left(1\right)-1\right)^2$$

$$\Longrightarrow\quad 3=A\left(0\right)\left(3\right)+B\left(3\right)+C\left(0\right)^2\quad\Longrightarrow\quad 3=3B\quad\Longrightarrow\quad B=1.$$

- Si $x=-2$, entonces

$$2\left(-2\right)^2-6\left(-2\right)+7=A\left(\left(-2\right)-1\right)\left(\left(-2\right)+2\right)+B\left(\left(-2\right)+2\right)+C\left(\left(-2\right)-1\right)^2$$

$$\Longrightarrow\quad 27=A\left(-3\right)\left(0\right)+B\left(0\right)+C\left(-3\right)^2\quad\Longrightarrow\quad 27=9C\quad\Longrightarrow\quad C=3.$$

- Si $x = 0$, entonces

$$2\left(0\right)^2 - 6\left(0\right) + 7 = A\left(\left(0\right) - 1\right)\left(\left(0\right) + 2\right) + B\left(\left(0\right) + 2\right) + C\left(\left(0\right) - 1\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad 7 = A\left(-1\right)\left(2\right) + B\left(2\right) + C\left(-1\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad 7 = -2A + 2B + C,$$

como $B = 1$ y $C = 3$, entonces

$$7 = -2A + 2\left(1\right) + \left(3\right) \quad \Longrightarrow \quad 7 = -2A + 5 \quad \Longrightarrow \quad 2 = -2A \quad \Longrightarrow \quad A = -1.$$

Así, $A = -1$, $B = 1$ y $C = 3$ y se tiene que

$$\frac{2x^2 - 6x + 7}{\left(x - 1\right)^2\left(x + 2\right)} = \frac{-1}{x - 1} + \frac{1}{\left(x - 1\right)^2} + \frac{3}{x + 2},$$

entonces

$$\int \frac{2x^2 - 6x + 7}{\left(x - 1\right)^2\left(x + 2\right)}\, dx = \int \left(\frac{-1}{x - 1} + \frac{1}{\left(x - 1\right)^2} + \frac{3}{x + 2}\right) dx,$$

es decir

$$\int \frac{2x^2 - 6x + 7}{\left(x - 1\right)^2\left(x + 2\right)}\, dx = -\int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{dx}{\left(x - 1\right)^2} + 3\int \frac{dx}{x + 2}.$$

Calculamos cada integral

- Para $\displaystyle\int \frac{dx}{x - 1}$. Se propone el cambio de variable

$$u = x - 1, \qquad\qquad du = dx,$$

así, la integral queda

$$\int \frac{dx}{x - 1} = \int \frac{du}{u} = \ln\left|u\right| + C_1 = \ln\left|x - 1\right| + C_1.$$

Luego

$$\int \frac{dx}{x - 1} = \ln\left|x - 1\right| + C_1.$$

- Para $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x - 1\right)^2}$. Se propone el cambio de variable

$$u = x - 1, \qquad\qquad du = dx,$$

así, la integral queda

$$\int \frac{dx}{\left(x-1\right)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}\,du = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C_2 = \frac{u^{-1}}{-1} + C_2$$

$$= -\frac{1}{u} + C_2 = -\frac{1}{x-1} + C_2.$$

Luego

$$\int \frac{dx}{\left(x-1\right)^2} = -\frac{1}{x-1} + C_2.$$

- Para $\displaystyle\int \frac{dx}{x+2}$. Se propone el cambio de variable

$$u = x-2, \qquad\qquad du = dx,$$

así, la integral queda

$$\int \frac{dx}{x-2} = \int \frac{du}{u} = \ln\left|u\right| + C_3 = \ln\left|x-2\right| + C_3.$$

Luego

$$\int \frac{dx}{x-2} = \ln\left|x-2\right| + C_3.$$

Entonces

$$\int \frac{2x^2-6x+7}{\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)}\,dx = -\ln\left|x-1\right| - \frac{1}{x-1} + 3\ln\left|x-2\right| + C.$$

★

1. (6 ptos c/u) Resolver

$$b. \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+x^2\right)}$$

Solución : Puesto que, el límite superior es infinito, entonces es una **integral impropia**.

Además, observemos que, la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\left(1+x^2\right)}$ **NO** está definida para $x = 0$, por lo que, la integral, también, es una **integral impropia** para el límite inferior, por otra parte, f es una función positiva.

Así,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+x^2\right)} = \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+x^2\right)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+x^2\right)}$$

Estudiamos el comportamiento de cada una de las integrales impropias.

- Para la integral $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+x^2\right)}$: Tenemos que,

$$1 \leq 1+x^2 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x} \leq \sqrt{x}\left(1+x^2\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+x^2\right)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Estudiamos la convergencia o divergencia de $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Tenemos

$$\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \to 0^+} \int_a^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{a}\right) = 2,$$

por lo que, la integral converge, así, por el **criterio de comparación término-término** podemos concluir que

$$\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+x^2\right)}$$

también es convergente.

- Integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+x^2\right)}$. Proponemos el cambio de variable

$$x = u^2, \qquad\qquad dx = 2u\,du,$$

cambiamos los límites de integración

$$\text{Si} \quad x = 1, \quad \text{entonces} \quad u = 1$$

$$\text{Si} \quad x \to +\infty \quad \text{entonces} \quad u \to +\infty$$

entonces

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+x^2\right)} = 2\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^4+1}.$$

Aplicando el **criterio de comparación paso al límite** con la integral p, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^4}$, la cual es una integral convergente, ya que $p = 4 > 1$, tenemos

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{u^4+1}}{\dfrac{1}{u^4}} = \lim_{u\to+\infty} \frac{u^4}{u^4+1} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{u\to+\infty} \frac{\left[u^4\right]'}{\left[u^4+1\right]'} = \lim_{u\to+\infty} \frac{4u^3}{4u^3} = 1,$$

por lo que, concluimos que, la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^4+1}$$

es convergente y por ende,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}$$

es convergente.

Puesto que, ambas integrales

$$\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)} \qquad \text{y} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}$$

son convergentes, entonces

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}$$

es convergente. ★

2. (5 ptos) Sea F una función diferenciable, tal que

$$\lim_{x\to 0} F\left(x\right) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} F'\left(x\right) = 1.$$

Calcular, si es que existe,

$$\lim_{x\to 0} \cos \left(5^{2x} + \int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\, dt\right)^{F(x)},$$

Solución : Como la función coseno es una función continua, entonces

$$\lim_{x\to 0} \cos \left(5^{2x} + \int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\, dt\right)^{F(x)} = \cos\left(\lim_{x\to 0} \left(5^{2x} + \int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\, dt\right)^{F(x)}\right).$$

Así, estudiamos la existencia o no de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(5^{2x} + \int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\, dt\right)^{F(x)}$.

Observemos que, este límite presenta una indeterminación de la forma 1^∞, ya que

$$\lim_{x\to 0} \left(5^{2x} + \int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\, dt\right)^{F(x)} \overset{\text{S.I.}}{=} \left(5^{2(0)} + \int_0^{(0)} \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\, dt\right)^{F(0)} = \left(5^0+0\right)^\infty = 1^\infty.$$

Aplicamos $\exp - \ln$ y se obtiene

$$\lim_{x\to 0} \left(5^{2x} + \int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\, dt\right)^{F(x)} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\ln\left(5^{2x} + \int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\, dt\right)^{F(x)}\right),$$

como la función exponencial es una función continua,

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(\ln\left(5^{2x} + \int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\, dt\right)^{F(x)}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} \ln\left(5^{2x} + \int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\, dt\right)^{F(x)}\right),$$

donde

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \ln\left(5^{2x} + \int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\, dt\right)^{F(x)} &= \lim_{x\to 0} F\left(x\right) \ln\left(5^{2x} + \int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\, dt\right) \\
&\overset{\text{S.I.}}{=} F\left(0\right) \ln\left(5^{2(0)} + \int_0^0 \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\, dt\right) \\
&= \left(\infty\right)\left(\ln 1\right) = \left(\infty\right)\left(0\right) \quad \longleftarrow \quad \text{Indeterminado.}
\end{aligned}$$

Escribimos esta indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$ y aplicamos la **regla de L'Höpital**

$$\lim_{x\to 0} F(x)\ln\left(5^{2x}+\int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(5^{2x}+\displaystyle\int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt\right)}{\dfrac{1}{F(x)}}$$

$$\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left[\ln\left(5^{2x}+\displaystyle\int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt\right)\right]'}{\left[\dfrac{1}{F(x)}\right]'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{5^{2x}+\displaystyle\int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt}\left[5^{2x}+\displaystyle\int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt\right]'}{-\dfrac{1}{F^2(x)}\Big[F(x)\Big]'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{5^{2x}+\displaystyle\int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt}\left(\left[5^{2x}\right]'+\left[\displaystyle\int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt\right]'\right)}{-\dfrac{1}{F^2(x)}F'(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{5^{2x}+\displaystyle\int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt}\left(\Big(2\Big)\Big(5^{2x}\ln 5\Big)+\dfrac{\arctan x}{x^2+x+3}\right)}{-\dfrac{1}{F^2(x)}F'(x)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{5^{2x}+\displaystyle\int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt}}{\dfrac{F'(x)}{F^2(x)}}\left(5^{2x}\,2\ln 5+\frac{\arctan x}{x^2+x+3}\right)$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{F^2(x)}{\left(5^{2x} + \int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt\right) F'(x)} \left(5^{2x}\, 2\ln 5 + \frac{\arctan x}{x^2+x+3}\right)$$

$$= -\frac{\lim_{x\to 0} F^2(x)}{\lim_{x\to 0}\left(5^{2x} + \int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt\right) \lim_{x\to 0} F'(x)} \lim_{x\to 0}\left(5^{2x}\, 2\ln 5 + \frac{\arctan x}{x^2+x+3}\right),$$

donde esta última igualdad es cierta siempre y cuando los límites existan.

Calculamos cada límite

- Para $\lim_{x\to 0} F^2(x)$. Tenemos

$$\lim_{x\to 0} F^2(x) = \lim_{x\to 0}\left(F(x)\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0} F(x)\right)^2 = \left(+\infty\right)^2 = +\infty.$$

Luego

$$\lim_{x\to 0} F^2(x) = +\infty.$$

- Para $\lim_{x\to 0}\left(5^{2x} + \int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt\right)$. Se tiene

$$\lim_{x\to 0}\left(5^{2x} + \int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt\right) \overset{\text{S.I.}}{=} 5^{2(0)} + \int_0^{0} \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt = 5^0 + 0 = 1.$$

Luego

$$\lim_{x\to 0}\left(5^{2x} + \int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt\right) = 1.$$

- Para $\lim_{x\to 0} F'(x)$. por hipótesis se tiene

$$\lim_{x\to 0} F'(x) = 1.$$

- Para $\lim_{x\to 0}\left(5^{2x}\, 2\ln 5 + \frac{\arctan x}{x^2+x+3}\right)$. Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\left(5^{2x}\, 2\ln 5 + \frac{\arctan x}{x^2+x+3}\right) \overset{\text{S.I.}}{=} 5^{2(0)}\, 2\ln 5 + \frac{\arctan(0)}{(0)^2 + (0) + 3} = 5^0\, 2\ln 5 + \frac{0}{3} = 2\ln 5.$$

Luego

$$\lim_{x\to 0}\left(5^{2x}\, 2\ln 5 + \frac{\arctan x}{x^2+x+3}\right) = 2\ln 5.$$

Así,

$$\lim_{x\to 0} F\left(x\right)\ln\left(5^{2x}+\int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt\right)=-\frac{+\infty}{\left(1\right)\left(1\right)}\,2\ln 5=-\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(5^{2x}+\int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt\right)^{F(x)}=-\infty,$$

por lo tanto,

$$\exp\left(\lim_{x\to 0}\ln\left(5^{2x}+\int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt\right)^{F(x)}\right)=e^{-\infty}=0.$$

Luego

$$\lim_{x\to 0}\left(5^{2x}+\int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt\right)^{F(x)}=\exp\left(\lim_{x\to 0}\ln\left(5^{2x}+\int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt\right)^{F(x)}\right)=e^{-\infty}=0.$$

Finalmente

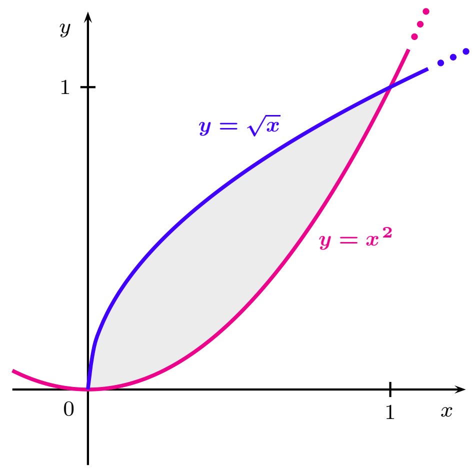
$$\lim_{x\to 0}\cos\left(5^{2x}+\int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt\right)^{F(x)}=\cos\Big(0\Big)=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\cos\left(5^{2x}+\int_0^x \frac{\arctan t}{t^2+t+3}\,dt\right)^{F(x)}=1.$$

★

3. (5 ptos) La base de un sólido es la región R limitada por $y=\sqrt{x}$ y $y=x^2$. Toda sección transversal perpendicular al eje x es un semicírculo cuyo diámetro se extiende a lo largo de R. Encuentre el volumen del sólido.

Solución : Graficamos la región R.



Tenemos que, el volumen del sólido viene dado por

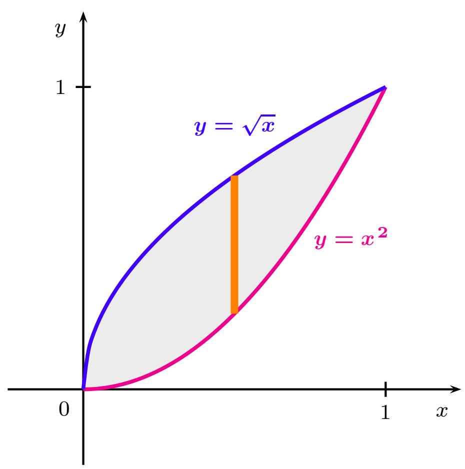
$$V=\int_a^b A(x)\,dx,$$

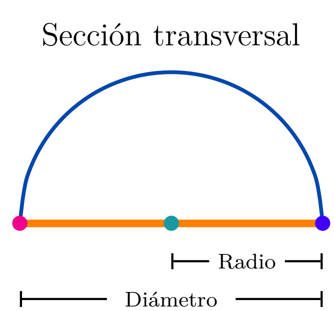
donde $A(x)$ es el área de la sección transversal perpendicular al eje x.

Puesto que, las secciones transversales perpendiculares al eje x son semicírculos, entonces

$$A(x)=\frac{\pi}{2}r^2,$$

donde r es el radio del círculo. Así,





Es conocido que,

$$\text{Diámetro}=2\,\text{Radio}\qquad\Longrightarrow\qquad \text{Radio}=\frac{\text{Diámetro}}{2},$$

puesto que

$$\text{Diámetro} = \sqrt{x} - x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Radio} = \frac{\sqrt{x} - x^2}{2}.$$

Entonces

$$A(x) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{x} - x^2}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}\left(\sqrt{x} - x^2\right)^2.$$

Por lo que

$$V = \int_0^1 \frac{\pi}{8}\left(\sqrt{x} - x^2\right)^2 dx = \frac{\pi}{8}\int_0^1 \left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\left(\sqrt{x}\right)\left(x^2\right) + \left(x^2\right)^2\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\int_0^1 \left(x - 2x^{5/2} + x^4\right) dx = \frac{\pi}{8}\left(\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 2x^{5/2}\,dx + \int_0^1 x^4\,dx\right).$$

donde

- Para $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$, se tiene

$$\int_0^1 x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\,\right|_0^1 = \frac{(1)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

- Para $\displaystyle\int_0^1 2x^{5/2}\,dx$, se tiene

$$\int_0^1 2x^{5/2}\,dx = 2\int_0^1 x^{5/2}\,dx = 2\left(\frac{x^{7/2}}{7/2}\,\right|_0^1 = 2\left(\frac{2}{7}x^{7/2}\,\right|_0^1 = 2\left(\frac{2}{7}(1)^{7/2} - \frac{2}{7}(0)^{7/2}\right) = \frac{4}{7}.$$

- Para $\displaystyle\int_0^1 x^4\,dx$, se tiene

$$\int_0^1 x^4\,dx = \left(\frac{x^5}{5}\,\right|_0^1 = \frac{(1)^5}{5} - \frac{(0)^5}{5} = \frac{1}{5}.$$

Por lo tanto

$$V = \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{7} + \frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{8}\left(\frac{35 - 40 + 14}{70}\right) = \frac{\pi}{8}\left(\frac{9}{70}\right) = \frac{9}{560}\pi.$$

Luego

$$V = \frac{9}{560}\pi.$$

■

4. (7 ptos) Considere la región R limitada por

$$2x+3y-6\geq 0, \qquad \left(x-1\right)^2+y^2\leq 25, \qquad y\leq x^3+x^2+3, \qquad 1^{\text{er}} \text{ cuadrante.}$$

Plantear las integrales que proporcionan el volumen del sólido que se generan al girar la región R alrededor

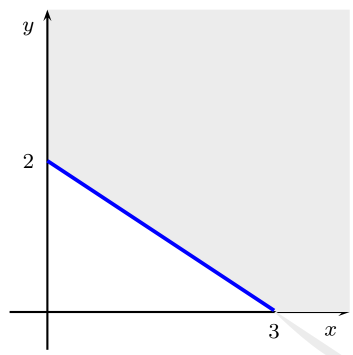
a) eje x. *b*) eje y. *c*) $x=8$. *d*) $y=-4$.

Solución : Graficamos las curvas involucrada en la región R. Observemos que una de las condiciones dadas es que se trabaje en el primer cuadrante, esto quiere decir, que solo nos interesa las abscisas y ordenadas positivas.

- Para $2x+3y-6\geq 0$. Tenemos

$$2x+3y-6=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y=-\frac{2}{3}x+2$$

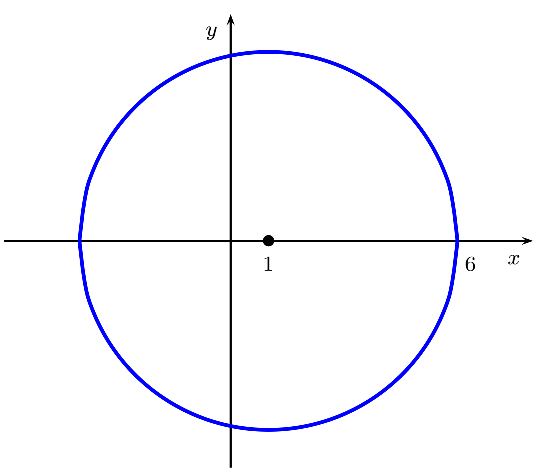
así,



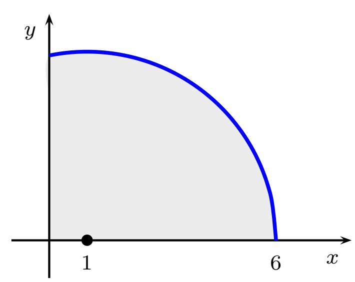
- Para $\left(x-1\right)^2+y^2\leq 25$. Tenemos que, la curva

$$\left(x-1\right)^2+y^2=25$$

representa un círculo de centro $\left(1,0\right)$ y radio $r=5$.



$\Longrightarrow$



Región del 1^{er} cuadrante

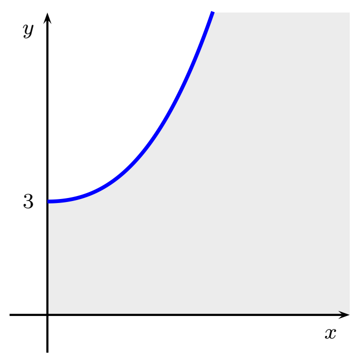
- Para $y \leq x^3 + x^2 + 3$. Graficamos la función $y = x^3 + x^2 + 3$ en el 1^{er} cuadrante.

  Derivamos
  $$y' = \left[x^3 + x^2 + 3\right]' = 3x^2 + 2x,$$
  observemos que, para $x \geq 0$, la primera derivada siempre es positiva, por lo que la función es estrictamente creciente.

  Derivamos, de nuevo, para conocer su concavidad
  $$y'' = \left[3x^2 + 2x\right]' = 6x + 2,$$
  la cual siempre es positiva, para todo x en el 1^{er} cuadrante, por lo que la función es cóncava hacia arriba, para $x \geq 0$.

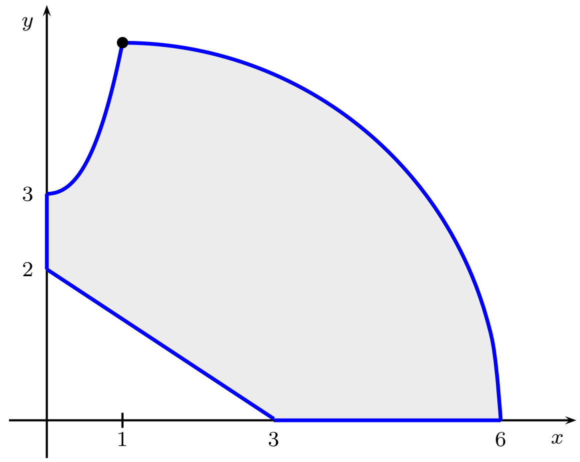
  Por otra parte, si $x = 0$, entonces
  $$y = \left(0\right)^3 + \left(0\right)^2 + 3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = 3.$$

  Así,

  Graficamos todas las curvas en el mismo sistema coordenado. En primer lugar, buscamos el punto de intersección entre las curvas
  $$\left(x - 1\right)^2 + y^2 = 25 \qquad \text{y} \qquad y = x^3 + x^2 + 3,$$
  por sustitución se obtiene
  $$\left(x - 1\right)^2 + \left(x^3 + x^2 + 3\right)^2 = 25,$$

donde una solución es $x = 1$. Entonces



Planteamos la integrales que nos proporciona los volúmenes pedidos.

(a) Eje x.

$$V = \pi \int_0^1 \left[\left(x^3 + x^2 + 3 \right)^2 - \left(-\frac{2}{3}x + 2 \right)^2 \right] dx$$

$$+\pi \int_1^3 \left[\left(\sqrt{25 - \left(x - 1 \right)^2} \right)^2 - \left(-\frac{2}{3}x + 2 \right)^2 \right] dx + \pi \int_3^6 \left(\sqrt{25 - \left(x - 1 \right)^2} \right)^2 dx$$

(b) Eje y.

$$V = 2\pi \int_0^1 x \left(x^3 + x^2 + 3 - \left(-\frac{2}{3}x + 2 \right) \right) dx$$

$$+2\pi \int_1^3 x \left(\sqrt{25 - \left(x - 1 \right)^2} - \left(-\frac{2}{3}x + 2 \right) \right) dx + 2\pi \int_3^6 x \sqrt{25 - \left(x - 1 \right)^2} dx$$

(c) Recta $x = 8$

$$V = 2\pi \int_0^1 \left(8 - x \right) \left(x^3 + x^2 + 3 - \left(-\frac{2}{3}x + 2 \right) \right) dx$$

$$+2\pi \int_1^3 \left(8 - x \right) \left(\sqrt{25 - \left(x - 1 \right)^2} - \left(-\frac{2}{3}x + 2 \right) \right) dx$$

$$+2\pi \int_3^6 \left(8 - x \right) \sqrt{25 - \left(x - 1 \right)^2} dx$$

Farith J. Briceño N. farith.math@gmail.com

(d) Recta $y = -4$

$$V = \pi \int_0^1 \left[\left(x^3 + x^2 + 3 - \left(-4 \right) \right)^2 - \left(-\frac{2}{3}x + 2 - \left(-4 \right) \right)^2 \right] dx$$

$$+\pi \int_1^3 \left[\left(\sqrt{25 - \left(x - 1 \right)^2} - \left(-4 \right) \right)^2 - \left(-\frac{2}{3}x + 2 \right)^2 - \left(-4 \right) \right] dx$$

$$+\pi \int_3^6 \left[\left(\sqrt{25 - \left(x - 1 \right)^2} - \left(-4 \right) \right)^2 - \left(0 - \left(-4 \right) \right)^2 \right] dx$$

★

5. (6 ptos) Hallar los valores de a y b para que

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{2x\left(x+b\right)+a}{x\left(2x+a\right)}-1\right)dx=1.$$

Solución : Tenemos que

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{2x\left(x+b\right)+a}{x\left(2x+a\right)}-1\right)dx=\lim_{c\to+\infty}\int_1^{c}\left(\frac{2x\left(x+b\right)+a}{x\left(2x+a\right)}-1\right)dx=1.$$

Resolvemos la integral indefinida

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{2x\left(x+b\right)+a}{x\left(2x+a\right)}-1\right)dx&=\int\frac{2x\left(x+b\right)+a-x\left(2x+a\right)}{x\left(2x+a\right)}\,dx\\&=\int\frac{2x^2+2bx+a-2x^2-ax}{x\left(2x+a\right)}\,dx\\&=\int\frac{2bx+a-ax}{x\left(2x+a\right)}\,dx=\int\frac{\left(2b-a\right)x+a}{x\left(2x+a\right)}\,dx.\end{aligned}$$

Aplicamos el método de las descomposición en fracciones simples para obtener la familia de primitivas

$$\frac{\left(2b-a\right)x+a}{x\left(2x+a\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x+a}\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{\left(2b-a\right)x+a}{x\left(2x+a\right)}=\frac{A\left(2x+a\right)+Bx}{x\left(2x+a\right)},$$

de aquí,

$$\left(2b-a\right)x+a=A\left(2x+a\right)+Bx.$$

- Si $x=0$, entonces

$$\left(2b-a\right)(0)+a=A\left(2\,(0)+a\right)+B\,(0)\qquad\Longrightarrow\qquad a=aA\qquad\Longrightarrow\qquad A=1.$$

- Si $x=1$, entonces, como $A=1$

$$\begin{aligned}\left(2b-a\right)(1)+a=\left(1\right)\left(2\,(1)+a\right)+B\,(1)\qquad&\Longrightarrow\qquad 2b-a+a=2+a+B\\&\Longrightarrow\qquad 2b=2+a+B\qquad\Longrightarrow\qquad B=2b-a-2.\end{aligned}$$

Por lo que

$$\frac{\left(2b-a\right)x+a}{x\left(2x+a\right)}=\frac{1}{x}+\frac{2b-a-2}{2x+a}.$$

Integramos

$$\int\frac{\left(2b-a\right)x+a}{x\left(2x+a\right)}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx+\int\frac{2b-a-2}{2x+a}\,dx=\ln\left|x\right|+\frac{2b-a-2}{2}\ln\left|2x+a\right|+K,$$

es decir

$$\int\frac{\left(2b-a\right)x+a}{x\left(2x+a\right)}\,dx=\ln\left|x\right|+\frac{2b-a-2}{2}\ln\left|2x+a\right|+K.$$

Entonces

$$\int_1^c\left(\frac{2x\left(x+b\right)+a}{x\left(2x+a\right)}-1\right)dx=\left(\ln\left|x\right|+\frac{2b-a-2}{2}\ln\left|2x+a\right|\right|_1^c$$

$$=\ln\left|c\right|+\frac{2b-a-2}{2}\ln\left|2c+a\right|-\left(\ln\left|(1)\right|+\frac{2b-a-2}{2}\ln\left|2\,(1)+a\right|\right)$$

$$=\ln\left|c\right|+\frac{2b-a-2}{2}\ln\left|2c+a\right|-\frac{2b-a-2}{2}\ln\left|2+a\right|.$$

Resolvemos

$$\lim_{c\to+\infty}\left(\ln\left|c\right|+\frac{2b-a-2}{2}\ln\left|2c+a\right|-\frac{2b-a-2}{2}\ln\left|2+a\right|\right)=1,$$

que es equivalente a resolver

$$\lim_{c\to+\infty}\left(\ln\left|c\right|+\frac{2b-a-2}{2}\ln\left|2c+a\right|-\frac{2b-a-2}{2}\ln\left|2+a\right|-1\right)=0,$$

el cual escribimos como

$$\lim_{c\to+\infty}\left(\ln\left|c\right|+\frac{2b-a-2}{2}\ln\left|2c+a\right|-\frac{2b-a-2}{2}\ln\left|2+a\right|-\ln e\right)=0,$$

así,

$$\lim_{c\to+\infty}\left(\ln\left|c\right|-\ln e+\frac{2b-a-2}{2}\ln\left|2c+a\right|-\frac{2b-a-2}{2}\ln\left|2+a\right|\right)=0,$$

es decir

$$\lim_{c\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{c}{e}\right|+\frac{2b-a-2}{2}\ln\left|\frac{2c+a}{2+a}\right|\right)=0.$$

Si $\dfrac{2b-a-2}{2}=-1$, se tiene

$$\lim_{c\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{c}{e}\right|-\ln\left|\frac{2c+a}{2+a}\right|\right)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{c\to+\infty}\ln\left|\frac{\left(2+a\right)c}{e\left(2c+a\right)}\right|=0,$$

de aquí,

$$\ln\frac{2+a}{2e}=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2+a}{2e}=1 \qquad \Longrightarrow \qquad 2+a=2e \qquad \Longrightarrow \qquad a=2e-2,$$

por lo tanto

$$\frac{2b-a-2}{2}=-1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2b-\left(2e-2\right)-2}{2}=-1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2b-2e+2-2}{2}=-1$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{2b-2e}{2}=-1 \qquad \Longrightarrow \qquad b-e=-1 \qquad \Longrightarrow \qquad b=e-1.$$

Luego

$$a=2e-2 \qquad \text{y} \qquad b=e-1.$$

★